فصل ۶

کاربردهای معادلات دیفرانسیل جزئی

۱.۶ مقدمه

کاربردهای معادلات انتگرالی به معادلات دیفرانسیل معمولی محدود نمی شود. در واقع، مهم ترین کاربرد معادلات انتگرالی در یافتن راه حل هایی از مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات دیفرانسیل جزئی درجه دوم پدیدار می شود. مسائل مقدار مرزی برای معادلات نوع بیضوی می توانند به معادلات انتگرال فردهلم کاهش یابد، مادامیکه مطالعه ی معادلات دیفراسیل سهمی گون و هذلولی گون منجر به معادلات انتگرال ولترا می شود. ما باید توجه خود را به معادلات دیفرانسیل جزئی خطی از نوع بیضی گون، به ویژه به معادلات لاپلاس، پواسون و هلم هولتز محدود کنیم، که در آن جالب ترین و مهم ترین موفقیت های تئوری معادلات انتگرال قرار می گیرد.

سه نوع شرایط مرزی در مطالعه ی معادلات دیفرانسیل جزئی بیضی گون ایجاد می شود. نوع اول شرط دیریکله است. در این مورد، ما مقدار جواب در مرز را تعیین می کنیم. نوع دوم شرط نیومن است. در این مورد، ما مقدار انحراف نرمال از جواب در مرز را تعیین می کنیم. وقتیکه شرایط دیریکله در برخی از قسمت های مرز و شرایط نیومن را در دیگر قسمت های مرز تعیین می کنیم، یک مسئله ی مقدار مرزی مختلط داریم.

قضیه ی دیورژانس و دو اتحاد گرین به طور مکرر در این فصل استفاده خواهد شد. به صورت زیر هستند:

قضیه ی دیورژانس:

$$\int_R div\, \mathbf{A}\, dV = \int_S \mathbf{A}.\mathbf{n}\, dS; \qquad (۱.۱)$$

اتحاد اول گرین:

$$\int_R u\nabla^2 \nu\, dV = -\int_R (grad\, u\, .\, grad\, \nu)\, dV \, + \int_S u\frac{\partial \nu}{\partial n}\, dS; \qquad (۲.۱)$$

اتحاد دوم گرین:

$$\int_R (u\nabla^2\nu \, - \, \nu\nabla^2 u)\, dV \, = \int_S (u\frac{\partial \nu}{\partial n} - \nu\frac{\partial u}{\partial n})\, dS, \qquad (۳.۱)$$

که A یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیر است و توابع u و ν مشتقات جزئی درجه دوم دارند که در محدوده ی کراندار R پیوسته هستند؛ S کران R است، مادامیکه n به معنی واحد نرمال به سمت S است. سطح S سطحی صاف (یا منظم) است همانطور که توسط کلاگ تعریف شده است [۹]. عملگر دیفرانسیل ∇^2 لاپلاسین است، که در آن مختصات کارتزین x_1, x_2, x_3 شکل زیر را دارد.

$$\nabla^2 \, = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \, + \, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \, + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\, . \qquad (۴.۱)$$

هر پاسخ u از معادله ی $\nabla^2 u = 0$ تابع همساز نامیده می شود.

برای نگه داشتن فصل در اندازه ای قابل مدیریت، ما باید خودمان را به طور کلی به مسائل سه بعدی محدود کنیم. نتایج می توانند به طور آماده هنگامیکه تکنیک آن بدست آمد به مسائل دو بعدی تعمیم داده شود. عبارات با حروف بزرگ مانند x باید سه گانه ی (x_1, x_2, x_3) را مشخص کنند. مقادیر R_i و R_e به ترتیب به معنی نواحی داخلی و خارجی برای S هستند. علاوه بر این، ما نباید روش معمول نوشتن dS_x یا dS_ξ برای مشخص کردن را دنبال کنیم که انتگرال گیری با توجه به متغیر x یا ξ است. ما باید تنها بنویسیم dS و باید از متن به عنوان اینکه متغیر انتگرال سازی چیست مشخص باشد.

ما باید به طور کلی علاقه مند به دادن فرمول سازی معادله ی انتگرال به معادلات دیفراسیل $\nabla^2 u = 0$ معادله لاپلاس؛ $\nabla^2 u = -4\pi\rho$، معادله ی پواسون؛ و $(\nabla^2 + k^2)\, u = 0$ معادله هلم هولتز (یا موج حالت پایدار) باشیم. در اینجا، $\rho(x)$ تابع داده شده از پواسون و k عدد داده شده است.

۲.۶ فرمول های ارائه شده ی انتگرال برای راه حل های معادلات لاپلاس و پواسون

نقطه ی شروع ما پاسخ بنیادی (یا پاسخ فضای آزاد) $E(x;\xi)$ است که به صورت زیر برقرار است:

$$-\nabla^2 E = \delta(x - \xi) \qquad (۱.۲)$$

و در بی نهایت به صفر می رسد. این تابع می تواند به عنوان پتانسیل الکترو استاتیک در نقطه ی محدوده ی دلخواه x به علت بار واحد در نقطه ی منبع ξ تفسیر شود. چنین پتانسیلی به صورت زیر داده شده است.

$$E(x;\xi) = \frac{1}{4}\pi r = \frac{1}{4}\,|x - \xi|. \qquad (۲.۲)$$

برای مورد دو بعدی، فرمول متناظر $(\frac{1}{2\pi}) log(\frac{1}{|x-\xi|}) = (\frac{1}{2}\pi) log(\frac{1}{r})$، است که $x = (x_1,\, x_2)$ و $\xi = (\xi_1,\, \xi_2)$ می باشند.

پاسخ بنیادی می تواند برای بدست آوردن پاسخ معادله ی پواسون استفاده شود.

$$-\nabla^2 u = 4\pi\rho\,. \qquad (۳.۲)$$

در واقع، معادله ی (۱) در $u(x)$، (۳) در $E(x;\,\xi)$، ضرب کنید، منهای، انتگرال ناحیه ی R_i، و از اتحاد دوم گرین مانند خاصیت انتخابی تابع دلتا استفاده کنید. نتایج به صورت زیر است (بعد از برچسب گذاری مجدد x و ξ):

$$ux = \int_R \frac{\rho}{r}\, dV - \frac{1}{4\pi}\int_S u\,\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\, dS\,. \qquad (۴.۲)$$

فرض می کنیم که از برخی ملاحظات قبلی مقادیر ρ، u و $\frac{\partial u}{\partial n}$ که در فرمول (۴) نشان داده شد را می دانیم.

$$u|_S = \tau\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = \sigma\,; \tag{۵.۲}$$

سپس این فرمول می شود

$$u(P) = \int_R \frac{\rho}{r}\,dV - \frac{1}{4\pi}\int_S \tau\,(Q)\frac{\rho}{\partial n}\,(\frac{1}{r})\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma(Q)}{r}\,dS\,, \tag{۶.۲}$$

که P محدوده ی نقطه ی x و Q نقطه ی ξ در S است. فرمول (۴) و (۶) منجر به ویژگی های جالب بسیاری از توابع همساز می شوند. برای جزئیات، خواننده باید به متن های مناسب اشاره کند [۴، ۹، ۱۹]. ما باید تنها به ویژگی هایی از سه انتگرال که در سمت راست معادله (۶) رخ می دهد توجه کنیم.

پتاسیل های نیوتنی، تک لایه و دو لایه

انتگرال $\int_R (\frac{\rho}{r})\,dV$ پتانسیل حجمی یا پتانسیل نیوتنی با چگالی حجمی ρ نامیده می شود. به طور مشابه، انتگرال $\int_S (\frac{\sigma}{r})\,dS$ پتانسیل ساده یا تک لایه با بار (یا منبع) چگالی σ نامیده می شود، مادامیکه انتگرال $\int_S \tau\,(\frac{\partial}{\partial n})\,(\frac{1}{r})$ پتانسیل دو لایه با چگالی دو قطبی τ است. این انتگرال ها در همه ی محدوده های تئوری پتانسیل بوجود می آیند. هرچند، ما باید از زبان الکترواستاتیک، همانطور که آن ها را به خوبی تفسیر می کند استفاده کنیم. این پتانسیل ها ویژگی های زیر را دارند.

برای پتانسیل نیوتنی $u = \int_R (\frac{\rho}{r})\,dV$، موارد زیر را داریم:

(۱) $\nabla^2 u = 0$، برای نقاط P در R_e .

(۲) برای نقاط P در R_i، انتگرال ناسره است ولی همگراست و اگر تابع ρ به اندازه ی کافی هموار باشد دو دیفرانسیل تحت علامت انتگرال می پذیرد؛ نتیجه $\nabla^2 u = -4\pi\rho(P)$ است.

پتانسیل تک لایه $u = \int_S (\frac{\sigma}{r})$ ویژگی های زیر را دارد:

۲.۶. فرمول های ارائه شده ی انتگرال برای راه حل های معادلات لاپلاس و پواسون ۵

(۱) $\nabla^2 u = 0$، خارج S.

(۲) انتگرال در سطح S ناسره می شود ولی اگر S منتظم باشد به طور یکنواخت همگرا می شود. علاوه بر این، این انتگرال پیوسته باقی می ماند آنچانکه از S عبور می کند.

(۳) مشتقات u که در جهت نرمال خطی به سطح S به سمت جهت S گرفته شده است در نظر بگیرید. سپس،

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{P_+} = -2\pi\sigma(P) + \int_S \sigma(Q)\frac{cos(x-\xi,\, n)}{|x-\xi|^2}\, dS \qquad (۷.۲)$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{P_-} = 2\pi\sigma(P) + \int_S \sigma(Q)\frac{cos(x-\xi,\, n)}{|x-\xi|^2}\, dS \qquad (۸.۲)$$

که P_- و P_+ مشخص می کنند که ما S را به ترتیب از R_i و R_e میل می دهیم، و جائیکه هر دو x و ξ بر روی S هستند. از (۷) و (۸)، ما پرش مشتق نرمال **u** در امتداد S را بدست می آوریم:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(\frac{\partial u}{\partial n}|_{P_-} - \frac{\partial u}{\partial n}|_{P_+}). \qquad (۹.۲)$$

به طور مشابه، پتانسیل دو لایه $u = \int_S \tau\,(\frac{\partial}{\partial n})\,(\frac{1}{r})\,dS$، ویژگی های زیر را دارد:

(۱) $\nabla^2 u = 0$، خارج S.

(۲) انتگرال در سطح ناسره می شود ولی اگر سطح S منظم باشد همگرا می شود.

(۳) اگر انتگرال تحت یک ناپیوستگی قرار گیرد هنگامیکه از S عبور می کنند به طوری که

$$u\,|_{P_+} = 2\pi\tau(P) + \int_S \tau(Q)\frac{cos(x-\xi,\, n)}{|x-\xi|^2}\, dS \qquad (۱۰.۲)$$

و

$$u\,|_{P_-} = -2\pi\tau(P) + \int_S \tau(Q)\frac{cos(x-\xi,\, n)}{|x-\xi|^2}\, dS \qquad (۱۱.۲)$$

در مفهوم روابط (۷) و (۸). از این رو، پرش u در امتداد S به صورت زیر است:

$$\tau = (\frac{1}{4\pi})[u|_{P_+} - u|_{P_-}]. \qquad (۱۲.۲)$$

(۴) مشتق نرمال آنچنانکه S عبور می کند پیوسته باقی می ماند. خواننده ای که به اثبات علاقه مند است اثبات زیبای استاک گلد را جستجو کند [۱۹].

مسائل داخلی و خارجی دیریکله

برای پاسخ یک مسئله ی مقدار مرزی برای یک معادله ی بیضی گون، نمی توانیم u و $\frac{\partial u}{\partial n}$ را به طور دلخواه بر S تعیین کنیم. بنابراین، معادله (۶) به ما اجازه نمی دهد تا راه حلی برای معادله (۳) ایجاد کنیم به طوری که u باید خودش مقادیر دلخواه بر S و نیز مقادیر دلخواه برای مشتق نرمال خود در آنجا داشته باشد. بدین ترتیب، دو نوع مسئله ی مقدار مرزی برای معادلات بیضی گون وجود دارد. برای یک نوع، مقدار پاسخ معین در S را داریم- مسئله ی معروف دیریکله. برای نوع دوم، مقدار مشتق نرمال در S تعیین می شود- مسئله ی نیومن. ما ابتدا در مورد مسائل دیریکله بحث می کنیم.

برای اصلاح این ایده، بگذارید درباره ی مسئله ی دیریکله برای ناحیه بیرونی به کره ی واحد بحث کنیم. به منظور دریافت راه حلی منحصرد به فرد، ضروری است تا برخی از انواع شرایط مرزی را در بی نهایت به همراه مقدار مرزی در سطح S کره اعمال شود. در واقع، تابع $u_1(x) = 1$ و $u_2(x) = \frac{1}{r}$ هر دو در ناحیه ی R_e همساز هستند و مقدار مشابه ۱ بر S فرض می شود. اما اگر ما نیاز داشته باشیم که پاسخ در بی نهایت به صفر برسد، سپس u_2 پاسخ مطلوب است. در حقیقت، نتیجه ی مهمی در تئوری پتانسیل است [۹، ۱۹] که، هنگامی که کسی مسئله ی دیریکله را برای بیرون کره ی واحد حل می کند (با گسترش در همسازهای کروی) چنان که در بی نهاین به صفر نزدیک می شود، سپس کسی در می یابد که رفتار پاسخ به صورت زیر است:

$$u|_\infty = O(\frac{1}{r}), \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_\infty = O(\frac{1}{r^2}). \qquad (۱۳.۲)$$

از این ملاحظات و از مقدار پاسخ بنیادی، به طور سنتی اثبات شده است که:

$$\lim_{r\to\infty} \int_S \left(E\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial E}{\partial r} \right) dS = 0 \qquad (۱۴.۲)$$

در سطح S کره به شعاع r.

حال ما می توانیم مسائل دیریکله ی بیرونی و خارجی برای یک سطح S دلخواه را تعریف و آنالیز کنیم.

تعریف. مسئله ی دیریکله ی بیرونی مسئله ی مقدار مرزی است:

$$\nabla^2 u_e = 0\,, \quad x \in R_e\,; \quad u_e|_S = f\,, u_e|_\infty = O\left(\frac{1}{r}\right)\,, \quad \frac{\partial u_e}{\partial r}\bar{\infty} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)\,, \tag{۱۵.۲}$$

که $f(x)$ یک تابع پیوسته ی داده شده در S است.

تعریف. مسئله ی دیریکله ی داخلی مسئله ی مقدار مرزی است:

$$\nabla^2 u_i = 0\,, \quad x \in R_i\,, \quad u_i|_S = f\,. \tag{۱۶.۲}$$

با فرض اینکه ما نیاز داریم تا پاسخ مسئله ی دیریکله ی داخلی را بیابیم. فرض می کنیم چنان که یک پاسخ u پتانسیل یک دو لایه با چگالی τ است (که همچنان ناشناخته است):

$$u_i(x) = \int_S \frac{\tau(\xi) cos(x-\xi,\, n)}{r^2}\, dS\,. \tag{۱۷.۲}$$

برای u_i برای برقراری شرط مرزی $(16)_2$ از S به رابطه ی (۱۱) اشاره میکنیم و معادله ی انتگرال فردهلم از نوع دوم برای $\tau(P)$ را به دست می آوریم.

$$\tau(P) = -(\frac{1}{2\pi}) f(P) + \int_S K(P,\, Q)\, \tau(Q)\, dS\,, \tag{۱۸.۲}$$

که کرنل $K(P,Q)$ به صورت زیر است:

$$K(P,\, Q) = [cos(x-\xi,\, n)]\, / 2\pi\, |x-\xi|^2\,, \tag{۱۹.۲}$$

و $P(=x)$ و $Q(=\xi)$ هر دو در S هستند. ما معادله ی انتگرالی (۱۸) را برای τ حل کردیم، این پاسخ را در (۱۷) قرار می دهیم، و پاسخ مقدار مرزی مورد نیاز مسئله ی (۱۶) را بدست آوردیم.

دقیقا در مسیر مشابه، مسئله ی دیریکله برای یک ناحیه ی خارجی که به طور درونی توسط S محدود شده است می تواند برای پاسخ یک معادله ی انتگرال فردهلم از نوع دوم کاهش یابد.

ما می توانیم یک فرمول معادله ی انتگرال مسائل مقدار مرزی داخلی و خارجی (۱۵) و (۱۶) در یک ترکیب محیط ارائه کنیم هنگامی که $f(x)$ تابع مشابه در هر دو این مسائل هستند. در نظر بگیرید که پاسخ بنیادی $E(x;\xi)$ در رابطه ی زیر برقرار است

$$-\nabla^2 E = \delta(x-\xi)\,, \qquad \texttt{all for} \quad x \quad \texttt{and} \quad \xi\,. \tag{۲۰.۲}$$

(۱۶) در E، (۲۰) در u_i ضرب کنید، جمع کنید، انتگرال بگیرید و اتحاد دوم گرین را اعمال کنید. این نتیجه می دهد

$$\int_S \left(E\frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial E}{\partial n} \right) dS = \begin{cases} u_i(\xi), & \xi \in R_i, \\ 0, & \xi \in R_e, \end{cases} \tag{۲۱.۲}$$

که n نرمال خارجی به سمت R_i در S است.

نتیجه ی متناظر برای ناحیه ی خارجی با ضرب (۱۵) در E، (۲۰) در u_e، اضافه، انتگرال گیری در ناحیه ی محدود شده ی داخلی توسط S و خارجی توسط کره ی S_r، و اعمال اتحاد دوم گرین بدست می آید. توزیع از S_r با توجه به شرط مرزی در بی نهایت به صورت $r \to \infty$ به صفر می رسد، و ما در نهایت داریم

$$\int_S \left(-E\frac{\partial u_e}{\partial n} + u_e \frac{\partial E}{\partial n} \right) dS = \begin{cases} 0, & \xi \in R_i, \\ u_e(\xi), & \xi \in R_e, \end{cases} \tag{۲۲.۲}$$

که از این حقیقت استفاده کردیم که نرمال خارجی به R_e در S در جهت n است.

گام بعدی برای اضافه کردن (۲۱) و (۲۲) و مشاهده ی اینکه هر دو u_i و u_e مقدار مشابه f آنچانکه به سطح نزدیک می شویم است. از این رو، بدست می آوریم

$$\int_S \left(E(x;\xi)\frac{\partial u_i}{\partial n} - u_e\frac{\partial u_e}{\partial n} \right) dS = \begin{cases} u_i(\xi), & \xi \in R_i, \\ u_e(\xi), & \xi \in R_e, \end{cases} \tag{۲۳.۲}$$

و $x \in S$. بگذارید ما استفاده از روابط (۲) و (۹) را بسازیم، و x و ξ را دوباره برچسب گذاری کنیم؛ بدین طریق، به رابطه ی زیر می رسیم.

$$\int_S \frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|}\, dS = \begin{cases} u_i(x), & x \in R_i, \\ u_e(x), & x \in R_e, \end{cases} \tag{۲۴.۲}$$

یعنی، یک پتانسیل یک لایه با بار چگالی نامعلوم σ . در نهایت با استفاده از شرط مرزی

$$u_i|_S = u_e|_S = f\,,$$

در (۲۴)، ما معادله ی انتگرال فردهلم از نوع اول را بدست می آوریم

$$f(x) = \int_S [\sigma(\xi)/|x-\xi|]\, dS\,, \tag{۲۵.۲}$$

با دو x و ξ در S.

مسائل داخلی و خارجی نیومن

در این مورد ما نیاز به یافتن پاسخی از معادله ی لاپلاس یا پواسون داریم هنگامی که مشتق نرمال تعیین می شود.

تعریف. مسئله ی خارجی نیومن مسئله ی مقدار مرزی زیر است.

$$\nabla^2 u_e = 0\,, \quad x \in R_e\,, \quad \frac{\partial u_e}{\partial n}|_S = f\,, \quad u_e|_\infty = 0\,. \tag{۲۶.۲}$$

تعریف. مسئله ی داخلی نیومن مسئله ی مقدار مرزی زیر است.

$$\nabla^2 u_i = 0\,, \quad x \in R_i\,, \quad \frac{\partial u_i}{\partial n}|_S = f\,. \tag{۲۷.۲}$$

برای یک مسئله ی نیومن، تابع $f(x)$ تعیین شده شرط ثابت زیر را برقرار می کند.

$$\int_S f(\xi)\, dS = 0\,, \quad \xi \in S\,, \tag{۲۸.۲}$$

که منتج به انتگرال گیری اتحاد زیر

$$\int_{R_i} (\nabla^2 u_i)\, dV = 0\,, \tag{۲۹.۲}$$

و استفاده از قضیه ی دیورژانس می شود.

مسائل داخلی و خارجی نیومن می تواند به معادلات انتگرال در موضوعی مشابه با موردی که برای مسئله ی دیریکله متناظر توضیح داده شد کاهش داده شود. در واقع، ما به دنبال پاسخی از مسئله ی نیومن داخلی در شکل پتانسیل لایه ی ساده هستیم

$$u_i = \int_S [\sigma(Q)/r]\, dS\,, \tag{۳۰.۲}$$

که یک تابع همساز در R_i است. این پاسخی از (۲۷) خواهد بود اگر چگالی σ انتخاب شود که

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}|_{P_-} = f(P)\,, \quad P \in S\,. \tag{۳۱.۲}$$

به رابطه ی (۸) اشاره می شود ، داریم

$$f(P) = \frac{\partial u_i}{\partial n}|_{P_-} = 2\pi\sigma(P) + \int_S \sigma(Q)\frac{cos(\xi - x,\, n)}{r^2}\, dS\,. \tag{۳۲.۲}$$

از این رو،$\sigma(P)$ پاسخی از معادلهی انتگرال فردهلم از نوع دوم است

$$\sigma(P) = \frac{1}{2\pi} - \int_S \sigma(Q)\frac{cos(\xi - x,\, n)}{2\pi r^2}\, dS\,. \tag{۳۳.۲}$$

پاسخ مسئله ی نیومن خارجی نیز منجر به یک معادله ی انتگرال مشابه می شود. علاوه بر این، ما می توانیم فرمول معادله ی انتگرال از مسائل (۲۶) و (۲۷) در ترکیبی محیط بدهیم هنگامی که f تابع مشابهی در هر دو این مسائل هستند. همانطور که برای مسئله ی دیریکله ی متناظر اقدام کردیم، یک معادله ی انتگرال فردهلم از نوع اول را بدست آوردیم. به جای یک پتانسیل تک لایه، اکنون یک پتانسیل دو لایه را بدست می آوریم. جزئیات برای خواننده باقی می ماند.

بگذارید این موضوع را بررسی کنیم که پاسخ (۲۷) منحصر به فرد نیست، از زمانی که یک ثابت دلخواه می تواند به یک پاسخ اضافه شود و تابع نتیجه داده شده در (۲۷) صادق خواهد بود.

۳.۶ مثال ها

مثال ۱. *پتانسیل الکترو استاتیک به علت یک دیسک مدور نازک.* بگذارید S را یک دیسک مدور به شعاع a در نظر بگیریم که در آن پتانسیل V تعیین می شود. بگذارید مختصات قطبی استوانه ای $(\rho,\, \varphi,\, z)$ را انتخاب کنیم طوریکه مبدا در مرکز صفحه با محور z عمود بر صفحه ی دیسک باشد. از این رو، صفحه مبدا $z = 0,\, 0 \ll \rho \ll a$ ، برای تمام σ را اشغال می کند. کمبود کلیت در اتخاذ پتانسیل V بر دیسک به عنوان وجود ندارد، که n یک عدد صحیح دلخواه است، زیرا می توانیم از اصل بر هم نهی فوریه استفاده کنیم. بار چگالی σ نیز از این پس شکل $\sigma^n\,(\rho)\, cos\, n\varphi$ را خواهد داشت. از (۲۵.۲.۶)، داریم

$$f^n(\rho)\, cos\, n\varphi = \int_{disk} [\sigma(\xi)/|x-\xi|]\, dS\,, \qquad (۱.۳)$$

که $x = (\rho,\, \varphi,\, 0)$ و $\xi = (t,\, \varphi_1,\, 0)$. یا

$$f^n(\rho)\, cos\, n\varphi = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{t\sigma^n(t)\, (cos\, n\varphi_1)\, d\varphi_1\, dt}{[\rho^2 + t^2 - 2\rho t cox(\varphi - \varphi_1)]^{\frac{1}{2}}}\,. \qquad (۲.۳)$$

ولی با جایگذاری $\psi = \varphi - \varphi_1$، در می یابیم که

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\varphi_1 \, d\varphi_1}{[\rho^2 + t^2 - 2\rho t \cos(\varphi - \varphi_1)]^{\frac{1}{2}}} = \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{\cos n(\varphi + \psi)\, d\psi}{[\rho^2 + t^2 - 2\rho t \cos(\varphi - \varphi_1)]^{\frac{1}{2}}} \tag{۳.۳}$$

$$= \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{(\cos n\varphi)\,(\cos n\psi)\, d\psi}{[\rho^2 + t^2 - 2\rho t \cos\psi]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= (\cos n\varphi) \left[\int_{-\varphi}^{0} + \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi-\varphi} \frac{\cos n\psi \, d\psi}{[\rho^2 + t^2 - 2\rho t \cos\psi]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$= (\cos n\varphi) \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\psi\, d\psi}{[\rho^2 + t^2 - 2\rho t \cos\psi]^{\frac{1}{2}}},$$

که در اولین انتگرال باید $\psi\prime = \psi + 2\pi$ را قرار دهیم.

از (۲) و (۳)، معادله ی زیر را دنبال می کنند

$$f^{(n)}(\rho) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{t\sigma^n(t) \cos n\psi \, d\psi \, dt}{[\rho^2 + t^2 - 2\rho t \cos psi]^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{۴.۳}$$

در نهایت، در (۴) فرمول گسترش یافته ی زیر را استفاده می کنیم

$$[\rho^2 + t^2 - 2\rho t \cos\psi]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{R=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (2 - \delta_{0,r})(\cos r\psi)\, J_r(p\rho)\, J_r(pt)\, dp\,, \tag{۵.۳}$$

که $\delta_{0,r}$ دلتای کرونکر است، و از تعامد تابع کسینوس استفاده می کند. نتیجه تابع انتگرال فردهلم از نوع اول است

$$f^{(n)}(\rho) = \int_0^a t\sigma^{(n)}(t)\, K_0(t,\, \rho)\, dt\,, \tag{۶.۳}$$

که کرنل $K_0(t,\, \rho)$ به صورت زیر است.

$$K_0(t,\, \rho) = 2\pi \int_0^{\infty} J_n(p\rho)\, J_n(pt)\, dp\,. \tag{۷.۳}$$

برای یک صفحه ی دایره ای با شعاع داخلی b و شعاع خارجی a فرمولی که متناظر با (۶) می باشد به صورت زیر است.

$$f^{(n)}(\rho) = \int_0^a t\sigma^{(n)}(t)\, K_0\,(t,\, \rho)\, dt\,. \tag{۸.۳}$$

مثال ۲. معادله ی انتگرال (۲۵.۲.۶) را حل کنید هنگامی که S یک کره ی واحد است و $f = \sin\theta\, \cos\varphi$؛یعنی، معادله ی انتگرال زیر را حل کنید.

$$\sin\theta\, \cos\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \frac{(\sin\theta_1)\, \sigma\,(\theta_1,\, \varphi 1)\, d\theta_1}{|x-\xi|}\,. \tag{۹.۳}$$

در اینجا، از فرمول بسط زیر استفاده می کنیم

$$\frac{1}{|x-\xi|} = \sum_{n=0}^{\infty} N_{0,n} \sum_{m=-n}^{n} \frac{Y_n^m(\theta,\, \varphi)\, Y_n^{*m}\,(\theta_1,\, \varphi_1)}{N_{m,n}} \tag{۱۰.۳}$$

که $Y_n^m(\theta,\, \varphi)$ همسازهای کروی هستند و

$$\begin{aligned} N_{m,\,n} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\sin\theta)\, |Y_n^m(\theta,\, \varphi)|^2\, d\theta \\ &= \frac{4\pi}{2n+1}\, \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}\,. \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

علاوه بر این، قرار می دهیم

$$\sigma(\theta_1,\, \varphi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \sigma_{m,n}\, Y_n^m\,(\theta_1,\, \varphi_1)\,, \tag{۱۲.۳}$$

و توجه کنید که $\sin\theta\, \cos\varphi = \frac{1}{2}[Y_1^1\,(\theta,\, \varphi) + Y_1^{-1}\,(\theta,\, \varphi)]$. با قرار دادن (۱۰) تا (۱۲) در (۹) و استفاده از ویژگی های متعامد همسازهای کروی، بدست می آوریم

$$\sigma_{1,1} = \sigma_{-1,1} = 3/8\pi\,, \tag{۱۳.۳}$$

و $\sigma_{m,n} = 0$ برای تمام m و n های دیگر. از این رو، نتیجه می شود که

که P_1^1 یک تابع لژاندر متناظر است.

۴.۶ روش تابع گرین

تابع گرین یک تابع کمکی (فرعی) است که نقش حیاتی مشابه در فرمول سازی معادله ی انتگرال معادلات دیفرانسیل جزئی را همانطورکه در مورد معادلات دیفرانسیل معمولی بازی می کند. این تابع بستگی به شکل معادله دیفرانسیل، شرط مرزی و محدوده دارد. برای مثال، تابع گرین $G(x;\,\xi)$ برای معادله ی لاپلاس در یک ناحیه باز، محدود شده ی R در فضای سه بعدی با مرز S پاسخ مسئله ی مقدار مرزی زیر است

$$-\nabla^2 G = \delta(x-\xi)\,, \quad G|_S = 0\,, \tag{۱.۴}$$

که x و ξ در R هستند. در زبان الکترو استاتیک، تابع **G** پتانسیل الکترو استاتیک به علت بار واحد در ξ هنگامیکه سطح S یک پوسته ی فلزی اساسی است. بر این اساس، G مجموع پتانسیل منبع واحد در ξ در فضای آزاد و پتانسیل ناشی از بار القا شده بر S است:

$$G(x;\xi) = (1/4\pi\,|x-\xi|) + \nu(x;\xi)\,, \tag{۲.۴}$$

که ν یک تابع همساز است که مسئله ی مقدار مرزی در آن صادق است

$$\nabla^2\nu = 0\,, \quad x\in R\,, \quad \nu|_S = -E\,. \tag{۳.۴}$$

بگذارید نشان دهیم که تابع گرین متقارن است. هنگامیکه $G(x;\xi)$ و $G(x;\eta)$ توابع گرین برای ناحیه R متناظر با منابع در ξ و η هستند، روابط زیر را داریم

$$-\nabla^2 G(x;\,\xi) = \delta(x-\xi)\,, \quad G|_S = 0\,, \tag{۴.۴}$$

$$-\nabla^2 G(x;\,\eta) = \delta(x-\eta)\,, \quad G|_S = 0\,. \tag{۵.۴}$$

نتیجه ی گام های معمول ضرب (۴) در $G(x;\eta)$،(۵)در $G(x;\xi)$تفریق، انتگرال گیری و اعمال اتحاد دوم گرین به صورت زیر است.

$$\int_S \left[G(x;\xi)\frac{\partial G(x;\eta)}{\partial n} - G(x;\eta)\frac{\partial G(x;\xi)}{\partial n}\right]\,dS = G(\xi;\eta) - G(\eta;\xi)\,. \tag{۶.۴}$$

تقارن تابع گرین توسط اعمال شرایط مرزی در (۶) دنبال می شود.

همچنین توجه کنید که پاسخ اساسی $E(x;\xi)$ تابع گرین فضای آزاد است.

پاسخ مسئله ی دیریکله

در حال حاضر ما برای یک فرمول سازی معادله ی انتگرال برای مسئله ی مقدار مرزی زیر آماده ایم.

$$-\nabla^2 u(x) = 4\pi\rho(x)\,, \quad x \in R\,, \quad u|_S = f\,, \tag{۷.۴}$$

از نقطه نظر تابع گرین. برای این هدف، (۱) در u و (۷) در G ضرب کنید، تفریق کنید، انتگرال بگیرید، از اتحاد دوم گرین استفاده کنید و بدست آورید

$$u(\xi) = 4\pi \int_R G(x;\xi)\,\rho\,(x)\,dV - \int_S f(x)[\partial G(x;\xi)/\partial n]\,dS\,. \tag{۸.۴}$$

با تعویض x و ξ و استفاده از تقارن تابع گرین، نمایش فرمول زیر را می یابیم.

$$u(x) = 4\pi \int_R G(x;\xi)\,\rho\,(\xi)\,dV - \int_S [\partial G(x;\xi)/\partial n] f(\xi)\,dS\,. \tag{۹.۴}$$

برای مورد خاص $\rho \equiv 0$، فرمول (۹) می شود

$$u(x) = -\int_S f(\xi)[\partial G(x;\xi)/\partial n]\,dS\,. \tag{۱۰.۴}$$

هنگامی که $f = 1$ در S، سپس پاسخ u از معادله ی لاپلاس به طور واضح برای مسئله ی دیریکله داخلی $u = 1$ می شود. از این رو، (۱۰) رابطه ی جالبی را تشکیل می دهد،

$$-\int_S [\partial G(x;\xi)/\partial n]\,dS = 1\,, \quad x \in R\,. \tag{۱۱.۴}$$

مثال. *فرمول انتگرال پواسون.* تابع گرین برای معادله ی لاپلاس، هنگامیکه سطح S یک کره است، می تواند توسط روش های گوناگونی یافته شود. آسان ترین روش بیان آن به عنوان ترکیب منبع و نقطه ی تصویر است. بگذارید شعاع کر a شود (شکل ۱.۶ را ببینید).

برای هر نقطه $P(=x)$ با فاصله ی شعاعی α در کره، نقطه ی معکوس $P\prime(=x\prime)$ بر خط شعاعی در یک فاصله ی شعاعی β خارج از کره داریم، به طوری که $\alpha\beta = a^2$.
اگر $Q(=\xi)$ هر نقطه ای بر S است، سپس مثلث های OQP و $OQP\prime$ به آسانی مشابه به نظر می رسد. بنابراین، $r\prime/r = a/\alpha$ یا

$$1/r = a/\alpha r\prime\,. \qquad (۱۲.۴)$$

با آزمایش روابط (۱) و (۲)، ما به طور آماده مقدار تابع گرین می یابیم که می شود

$$G(P,\,Q) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{a}{\alpha}\frac{1}{r\prime}\right)\,. \qquad (۱۳.۴)$$

با پیدا کردن تابع گرین، می توانیم مسئله ی دیریکله داخلی را برای کره حل کنیم:

$$\nabla^2 u = 0\,, \quad r < a\,; \quad u = f(\theta,\,\varphi) \quad \texttt{on} \quad r = a\,. \qquad (۱۴.۴)$$

برای استفاده از فرمول (۱۰) ما به مقدار $\partial G/\partial n$ نیاز داریم. این بدست می آید اگر از شکل مشاهده کنیم که

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= a^2 + r_2^2 ar\,\cos(x-\xi,\,n)\,; \\ \beta^2 &= a^2 + r'^2 - 2ar'\,\cos(x'-\xi,\,n)\,. \end{aligned} \qquad (۱۵.۴)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{a}{\alpha}\frac{1}{r\prime^2}\frac{\partial r\prime}{\partial n}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\cos(x-\xi,\,n)}{r^2} - \frac{a}{\alpha}\frac{\cos(x'-\xi,\,n)}{r'^2}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\alpha^2-a^2-r^2}{2ar^3} - \frac{a}{\alpha}\frac{\beta^2-a^2r'^2}{2ar'^3}\right) = -\frac{a^2-\alpha^2}{4\pi a r^3}\,, \end{aligned} \qquad (۱۶.۴)$$

که ما از روابط $\frac{a}{\alpha} = \frac{r_{prime}}{r}$ و $\alpha\beta = a^2$ استفاده کرده ایم.

با جایگذاری (۱۶) در (۱۰)، ما در نهایت داریم

$$u(P) = \frac{a(a^2-\alpha^2)}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \pi \frac{f(\theta',\varphi')(\sin\theta')\,d\theta'\,d\varphi'}{(\alpha^2+a^2-2a\alpha\,\cos(x;\xi))^{\frac{3}{2}})}\,. \tag{۱۷.۴}$$

مسئله ی نیومن

با تعریف تابع گرین $G(x;\xi)$ توسط مسئله ی مقدار مرزی

$$-\nabla^2\, G(x;\xi) = \delta(x-\xi)\,, \quad \partial G/\partial n|_S = 0\,, \tag{۱۸.۴}$$

می توانیم آنالیز فوق را به مسئله ی نیومن تعمیم دهیم. در واقع، معادله ی انتگرال که متناظر با (۱۰) برای مسئله ی نیومن می باشد

$$-\nabla^2 u = 0\,, \quad x \in R\,, \quad \partial u/\partial n = f \tag{۱۹.۴}$$

به صورت زیر است.

$$u(x) = \int_S G(x;\xi) f(\xi)\, dS\,. \tag{۲۰.۴}$$

در حقیقت، تابع f باید در شرط پایداری (۲۸.۲.۶) صادق باشد.

در نهایت، بگذارید مسائل دیریکله ی داخلی و خارجی را برای یک جسم S محصور شده با یک سطح Σ در نظر بگیریم:

$$\nabla^2 u_i = 0\,, \quad x \in R_i\,, \quad u_i|_S = f\,, \tag{۲۱.۴}$$

$$\nabla^2 u_e = 0\,, \quad x \in R_e\,, \quad u_e|_S = f\,, \quad u_e|_\Sigma = 0\,. \tag{۲۲.۴}$$

تابع گرین $G(x;\xi)$ مسئله ی کمکی برقرار باشد (فاکتور 4π در G را جذب می کنیم):

$$-\nabla^2 G = 4\pi\delta(x-\xi)\,, \quad G|_\Sigma = 0\,. \tag{۲۳.۴}$$

حال گام های مشابهی که در مشتق گیری فرمول (۲۵.۲.۶) انجام دادیم را دنبال می کنیم. از این رو، از روابط (۲۱) تا (۲۳)، بدست می آوریم

$$f(x) = \int_S G(x;\xi)\sigma(\xi)\,dS\,, \qquad (۲۴.۴)$$

که به (۲۵.۲.۶) برای یک محدود نشده ی محیط کاهش می دهد.

۵.۶ مثال ها

مثال ۱. *مسئله ی پتانسیل الکترو استاتیک از یک صفحه ی محدود هدایت شده توسط دو صفحه ی موازی.* این مسئله تعمیمی از مسئله ی در نظر گرفته شده در مثال ۱ از بخش ۳.۶ است. ما آن مفاهیم را دنبال می کنیم و فرض می کنیم که صفحه های موازی $z = b$ و $z = -c$ $(b,\, c > 0)$ هستند. مسئله ی مقدار مرزی می شود

$$\nabla^2 V(\rho,\, \varphi,\, z) = 0 \qquad \texttt{in} \quad D\,, \qquad (۱.۵)$$

$$V(\rho,\, \varphi,\, 0) = f^{(n)}(\rho)\, \cos n\varphi\,, \quad 0 \ll \rho \ll a \qquad (۲.۵)$$

$$V(\rho,\, \varphi,\, z) = 0\,, \quad z = b\,, \quad z = -c\,, \qquad (۳.۵)$$

که D ناحیه ی بین دیسک و صفحه های موازی است.

تابع گرین G متناظر با این مسئله در سیستم فرعی برقرار است

$$-\nabla^2\, G(x;\xi) = 4\pi\delta(x-\xi)\,, \quad G = 0 \quad \texttt{on} \quad z = b\,,\ z = -c\,. \qquad (۴.۵)$$

این تابع توسط روش تصاویر به آسانی یافته می شود. در واقع، برای یک بار واحد مثبت در نقطه ی منبع $\xi = (t,\, \varphi_1,\, z_1)$سیستم تصویر شامل بار واحد مثبت در نقاط می شود (شکل ۲.۶ را ببینید)

$$\xi_n^+ = [t,\, \varphi_1,\, 2n(b+c) + z_1]\,, \quad n = \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots\,. \qquad (۵.۵)$$

و بار واحد منفی در نقاط

$$\xi_n^- = [t,\, \varphi_1,\, 2n(b+c) - 2c + z_1]\,, \quad n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots\,. \qquad (۶.۵)$$

از این مقدار تابع گرین به صورت زیر می باشد.

$$G(x;\xi)=\frac{1}{|x-\xi|}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|x-\xi_n^+|}+\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{|x-\xi_n^+|}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x-\xi_n^-|} \tag{۷.۵}$$

گام بعدی استفاده از اتحاد زیر است،

$$1/|x-\xi|=\int_0^\infty J_O(p\varpi)(\exp -p|z-z_1|)\,dp\,, \tag{۸.۵}$$

که $\varpi=[\rho^2+t^2-2\rho t\,\cos(\varphi-\varphi_1)]^{\frac{1}{2}}$. سپس، رابطه ی (۷) شکل زیر را می گیرد.

$$\begin{aligned}G(x;\xi)=(1/|x-\xi|)+\int_0^\infty J_O(p\varpi)[&\sum_1^\infty(\exp -p|z-2n(b+c)-z_1|)\\ &+\sum_{-1}^{-\infty}(\exp -p|z-2n(b+c)-z_1|)\\ &-\sum_0^\infty(\exp -p|z-2n(b+c)+2c+z_1|)\\ &-\sum_{-1}^{-\infty}(\exp -p|z-2n(b+c)+2c+z_1|)]\,dp\,.\end{aligned} \tag{۹.۵}$$

بعد از اضافه کردن سری های هندسی که در رابطه ی (۹) و ساده سازی اندک رخ می دهد، بدست می آوریم

$$\begin{aligned}G(x;\xi)=(1/|x-\xi|)+\int_0^\infty &J_O(p\varpi)\\ &\times\frac{e^{-(c+z_1)p}[\sinh p(z-b)]-e^{-(n-z_1)p}[\sinh p(z+c)]}{\sinh p(b+c)}\,dp\,.\end{aligned} \tag{۱۰.۵}$$

در نهایت نتیجه ی استفاده از تعمیم $J_O(p\varpi)$

$$J_O(p\varpi)=\sum_0^\infty(2-\delta_{0r})[\cos r(\varphi-\varphi_1)]J_r(p\rho)J_r(pt)\,, \tag{۱۱.۵}$$

در (۱۰) به صورت زیر است

$$G(x;\xi) = \frac{1}{|x-\xi|} + \sum_{r=0}^{\infty}(2-\delta_{0r})[\cos r(\varphi-\varphi_1)G^{(r)}(\rho,\, t,\, z,\, z_1)]\,, \tag{۱۲.۵}$$

که

$$\begin{aligned} G^{(r)}(\rho,\, t,\, z,\, z_1) = \int_0^{\infty} & \frac{e^{-p(c+z_1)}[\sinh p(z-b)] - e^{-(b-z_1)p}[\sinh p(z+c)]}{\sinh p(b+c)} \\ & \times J_r(p\rho) J_r(pt)\, dp\,. \end{aligned} \tag{۱۳.۵}$$

برای استخراج معادله ی انتگرال، (۱) را در G و (۴) را در V ضرب می کنیم، شیوه ی معمول را دنبال می کنیم، و بدست می آوریم

$$V(\rho,\, \varphi,\, z) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^+ + S^-}\left(G\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial G}{\partial n}\right) dS\,, \tag{۱۴.۵}$$

که S^+ و S^- به ترتیب بخش های بالاتر و پایین تر دیسک هستند. در سطوح $S^\pm$..مقدار متعامد بیرونی به ترتیب $\mp\partial/\partial z_1$ است. استفاده از این حقیقت و شرایط مرزی (۲) در (۱۴)، داریم

$$f^{(n)}(\rho)\cos n\varphi = \int_0^a \int_0^{2\pi} t\sigma^{(n)}(t) G(\rho,\, t,\, \varphi,\, \varphi_1,\, 0,\, 0)(\cos n\varphi_1)\, dp_1\, dt\,, \tag{۱۵.۵}$$

که $\sigma^{(n)}(t)\cos n\varphi_1 = (1/4\pi)(\partial V/\partial z_{1+} - \partial V/\partial z_{1-})$. $\varphi_1 - \varphi = \psi$ را جایگذاری کنید و گام های که از (۲.۳.۶) به (۴.۳.۶) منجر می شود را دنبال کنید، بدست می آوریم

$$\begin{aligned} f^{(n)}(\rho) = & \int_0^a t\sigma(n)(t)\, dt \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\psi\, d\psi}{|x-\xi|_{z=z_1=0}} \\ & + \int_0 at\sigma^{(n)}(t)[2\pi G^{(n)}(\rho,\, t,\, 0,\, 0)]\, dt\,, \end{aligned} \tag{۱۶.۵}$$

که مقدار G را در (۱۲) جایگذاری کرده ایم. این می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$f^{(n)}(\rho) = \int_0^a t\sigma^{(n)}(t)\, K_1\,(t,\, \rho)\, dt\,, \tag{۱۷.۵}$$

که

$$K_1\,(t,\ \rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\psi\, d\psi}{[\rho^2 + t^2 - 2\rho t\ \cos\psi]^{\frac{1}{2}}} + 2\pi G^{(n)}(\rho,\ t,\ 0,\ 0)\,. \qquad (۱۸.۵)$$

هنگامیکه $b \to \infty$ ،$c \to \infty$،فرمول (۴.۳.۶) را بازیابی می کنیم.

برای یک دیسک دایره ای به شعاع داخلیb و شعاع خارجی a، فرمولی که متناظر است با (۱۷) به صورت زیر است

$$f^{(n)}(\rho) = \int_0^a t\sigma^{(n)}(t)\, K_1\,(t,\ \rho)\, dt \qquad (۱۹.۵)$$

با کرنل مشابه با (۱۸).

مثال ۲. *مسئله ی پتانسیل الکترو استاتیک از یک هادی متقارن در جهت محور واقع شده به طور متقارن در یک استوانه به شعاع b.* دوباره مختصات قطبی استوانه ای $(\rho,\ \varphi,\ z)$ با مبدا در مرکز هادی و محور z در امتداد محور تقارن (که محور استوانه نیز می باشد) در نظر می گیریم. برای ساده کردن، V را بر سطح S از هادی برای پیوستگی در نظر می گیریم. سپس، از رابطه ی (۲۴.۴.۶)، معادله ی انتگرال فردهلم از نوع اول را داریم

$$I = \int_S G(x;\xi)\,\sigma\,(\xi)\,dS\,, \quad x,\,\xi \in S\,, \qquad (۲۰.۵)$$

که G در سیستم زیر برقرار است

$$-\nabla^2 G = 4\pi\delta(x-\xi)\,, \quad G = 0 \ \text{ on } \quad \rho = b\,. \qquad (۲۱.۵)$$

با در نظر گرفتن مختصات قطبی استوانه ای، معادله ی دیفرانسیل برای G می شود

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial G}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{\rho}\delta\,(\rho - t)\delta(\psi)\delta(z - z_1)\,, \qquad (۲۲.۵)$$

که $\psi = \varphi_1 - \varphi$. از تعریف (۲.۴.۶) از تابع گرین، می دانیم که

$$G_1(x;\xi) = G(x;\xi) - (1/|x-\xi|) \qquad (۲۳.۵)$$

که در حد $\xi \to x$ محدود است. می توانیم پاسخ (۲۲) را با تعمیم سری های فوریه محاسبه کنیم

$$G(x;\xi) = \sum_{r=1}^{\infty}(2-\delta_{0r})(\cos r\psi)g^{(r)}(\rho,\, t,\, z,\, z_1)\,, \tag{۲۴.۵}$$

که

$$g^{(r)} = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} G(x;\xi)(\cos r\psi)\, d\psi\,.$$

معادله ی دیفرانسیل (۲۲) را در $\cos r\psi$ $(1/2\pi)$ ضرب کنید و با توجه به ψ از 0 تا 2π انتگرال بگیرید. نتیجه می شود

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}g^{(r)}\right) - \frac{r^2}{\rho^2}g^{(r)} + \frac{\partial^2 g^{(r)}}{\partial\rho^2} = -\frac{2}{\rho}\delta\,(\rho-t)\delta(z-z_1)\,. \tag{۲۵.۵}$$

سپس، انتقال تابع فوریه (۲۵) را با جایگذاری زیر در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} T(g^{(r)}) = &\qquad (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipz} g^{(r)}\, dz\,; \\ g^{(r)} = &\qquad (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipz} T\, g^{(r)}\, dp\,. \end{aligned} \tag{۲۶.۵}$$

سیستم (۲۱) می شود

$$\begin{aligned} &\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}\,T\,(g(r)) + \rho\,\frac{d}{d\rho}\,T\,(g(r)) - (\rho^2\,p^2 + r^2)\,T\,(g^{(r)}) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\rho\sqrt{\pi}}\,e^{ipz_1}\,\delta\,(\rho-t)\,, \quad T\,(g^{(r)}) = 0\,, \quad \rho = b\,. \end{aligned} \tag{۲۷.۵}$$

این مسئله ی مقدار مرزی می تواند به راحتی توسط روش و مفاهیم فصل ۵ حل شود و پاسخی از این طریق بدست می آید معکوس می شود تا تشکیل دهد

$$\begin{aligned} g^{(r)} = (1/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} & e^{ip(z_1-z)}\{K_r(p\rho_>)\, I_r\,(p\rho_<) \\ & - [K_r(pb)/I_r(pb)]\, I_r(p\rho)\, I_r(pt)\}\, dp\,, \end{aligned} \tag{۲۸.۵}$$

که I_r و K_r توابع بسل اصلاح شده هستند. در نهایت، از (۲۴) و (۲۸)، مقدار G را می یابیم:

$$G(x;\xi) = (1/\pi) \sum_{r=0}^{\infty} (2-\delta_{0r})(\cos r\psi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(z_1 - z)} \times \{K_r(p\rho_>)\, I_r\,(p\rho_<) - [K_r(pb)/I_r(pb)]\, I_r(p\rho)\, I_r(pt)\}\, dp\,. \tag{۲۹.۵}$$

هنگامیکه $b \to \infty$، $G = 1/|x-\xi|$و از (۲۹) داریم،

$$1/|x-\xi| = (1/\pi) \sum_{r=0}^{\infty} (2-\delta_{0r})(\cos r\psi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(z_1 - z)} K_r(p\rho_>)\, I_r\,(p\rho_<)\, dp\,. \tag{۳۰.۵}$$

با ترکیب (۲۹) و (۳۰)، داریم

$$G(x;\xi) = (1/|x-\xi|) \sum_{r=0}^{\infty} (2-\delta_{0r})(\cos r\psi) G^{(r)}(\rho,\, t,\, z,\, z_1)\,, \tag{۳۱.۵}$$

که

$$\begin{aligned} G^{(r)}(\rho,\, t,\, z,\, z_1) &= -(1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(z-z_1)} I_r\,(p\rho) I_r\,(pt)\,[K_r(pb)/I_r(pb)]\, dp \\ &= -(1/\pi)[\int_{0}^{\infty} e^{-ip(z-z_1)} I_r\,(p\rho) I_r\,(pt)\,[K_r(pb)/I_r(pb)]\, dp \\ &\quad + \int_{-\infty}^{0} e^{-ip(z-z_1)} I_r\,(p\rho) I_r\,(pt)\,[K_r(pb)/I_r(pb)]\, dp]\,. \end{aligned} \tag{۳۲.۵}$$

تغییر p به $-p$ در انتگرال دوم و مشاهده ی اینکه

$$I_r(-z) = (-1)^r\, I_r(z) \qquad K_r(-z) = (-1)^r\, K_r(z)\,,$$

و از این رو $K_r(-pb)/I_r(-pb) = K_r(pb)/I_r(pb)$..از (۳۲) داریم

$$G^{(r)}(\rho,\, t,\, z,\, z_1) = -(2/\pi) \int_{0}^{\infty} \left[\frac{I_r\,(p\rho) I_r\,(pt)\, K_r(pb)}{I_r(pb)} \right] \cos[p(z-z_1)]\, dp\,. \tag{۳۳.۵}$$

تا کنون، از این حقیقت که هادی در جهت محور متقارن است استفاده نکرده ایم. برای یک جسم متقارن در جهت محور، تابع گرین از φ مستقل است. که تنها یک عبارت در سری های (۳۱) باقی می گذارد:

$$G(x;\xi) = (1/|x-\xi|) + G^{(0)}(\rho,\, t,\, z,\, z_1)\,. \tag{۳۴.۵}$$

معادله ی (۳۴) از شکل (۲۳) است. با جایگذاری (۳۴) در (۲۰)، معادله ی انتگرال مورد نیاز را داریم. هنگامیکه ..$b \to \infty$معادله ی (۴.۳.۶) را برای $f^{(n)}(\rho) = 1$ بازیابی می کنیم.

۶.۶ معادله هلم هولتز

بحث دو بخش پیشین می تواند به راحتی به مورد معادله هلم هولتز تعمیم داده شود

$$(\nabla^2 + \lambda)\, u = 0\,. \tag{۱.۶}$$

تابع گرین فضای آزاد یا پاسخ بنیادی $E(x;\xi)$ پاسخ معادله دیفرانسیل متقارن کروی است

$$-\nabla^2 E - \lambda E = \delta(x-\xi)\,, \tag{۲.۶}$$

که در بی نهایت به صفر نزدیک می شود. چنین پاسخی در سه بعد به صورت زیر است

$$E(x;\xi) = \frac{\exp(i|x-\xi|\,\sqrt{\lambda})}{4\pi|x-\xi|} = \frac{\exp(ir\sqrt{\lambda})}{4\pi r}\,. \tag{۳.۶}$$

(۱) هنگامیکه λ یک عدد پیچیده است، سپس $\sqrt{\lambda}$ انتخاب می شود که ریشه ی λ که بخش موهومی مثبتی دارد تا E به طور نمایی در بی نهایت به صفر نزدیک می شود.

(۲) هنگامیکه λ حقیقی و مثبت است، یعنی،$\lambda = \omega^2$ ω. حقیقی است، پاسخ زیر

$$E(x;\xi) = \frac{\exp(i\omega|x-\xi|}{4\pi|x-\xi|} = \frac{\exp(ir\omega)}{4\pi r} \tag{۴.۶}$$

انتخاب می شود به طوریکه $\sqrt{\lambda} = \omega > 0$. این یک موج خروجی را نشان می دهد اگر ما عامل $e^{-i\omega t}$ را وصل کنیم.

(۳) هنگامیکه λ حقیقی و منفی است، دوباره $\sqrt{\lambda}$ در (۳) را انتخاب می کنیم تا مجذور ریشه ی $\lambda = -k^2$ باشد که یک بخش موهومی مثبت برای دلیل مشابه در (۱) دارد. برای مورد خاص ...، که k حقیقی و مثبت است، فرمول (۳) می شود

$$E(x;\xi) = e^{-kr}/4\pi r\,. \qquad (۵.۶)$$

پاسخ هایی که متناظر با (۳)، (۴) و (۵) در دو بعد هستند به ترتیب به صورت زیر می باشند

$$(i/4)\,H_0^{(1)}(|x-\xi|\sqrt{\lambda})\,, \quad (i/4)\,H_0^{(1)}(\omega|x-\xi|)\,, \quad (1/2\pi)\,K_0(k\,|x-\xi|)\,, \qquad (۶.۶)$$

در اینجا، توابع $H_0^{(1)}$ و K_0 به ترتیب توابع هنکل و بسل اصلاح شده هستند.

فرمول نمایش انتگرال برای پاسخ معادله ی ناهمگن

$$(\nabla^2 - k^2)\,u = -4\pi\rho \qquad (۷.۶)$$

از روابط (۲) و (۶) با استفاده از اتحاد گرین بدست می آید و به طور آماده به صورت زیر یافته می شود

$$u(x) = \int_R \frac{\rho e^{-kr}}{r}\,dV - \frac{1}{4\pi}\int_S u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{e^{-kr}}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,. \qquad (۸.۶)$$

تفسیر این انتگرال ها به عنوان پتانسیل های حجم، تک لایه و دو لایه مشابه با فرمول های متناظر در بخش ۲.۶ است. ویژگی های این پتانسیل ها نیز مشابه است. برای مثال، فرمول هایی که متناظر با (۷.۲.۶) و (۸.۲.۶) هستند به صورت زیر می باشند

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{P_\pm} = \mp 2\pi\sigma(P) + \int_S \sigma(Q)\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)\,dS\,, \qquad (۹.۶)$$

که

$$u = \int_S \sigma(Q)\,\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)\,dS\,. \qquad (۱۰.۶)$$

به طور مشابه فرمول هایی که متناظر با (۱۰.۲.۶) و (۱۱.۲.۶) هستند به صورت زیر هستند

$$|_{P_\pm} = \mp 2\pi\tau(P) + \int_S \tau(Q)\,\frac{\partial}{\partial n}\,(e^{-kr}/r)\,dS\,, \qquad (۱۱.۶)$$

که

$$u = \int_S \tau(Q)\,\frac{\partial}{\partial n}\,(e^{-kr}/r)\,dS\,. \qquad (۱۲.۶)$$

باقی مفاهیم مشابه بخش ۲.۶ هستند.

نمایش انتگرال پاسخ های مسائل دیریکله و نیومن داخلی و خارجی در موضوعی مشابه بدست می آید، همانطور که باید از مثال های بهره ی فیزیکی آشکار شود که در بخش بعدی ارائه می شوند. ما این بخش را با اشاره به شرط تابش سامرفلد به پایان می رسانیم. یک پاسخ سه بعدی از معادله ی هلم هولتز $(\nabla^2 - k^2)\,u = 0$ بیان شده است تا شرط تابش را برقرار کند اگر

$$\lim r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0\,, \qquad (۱۳.۶)$$

آنچانکه $r \to \infty$. ظاهرا، این شرط اشاره می کند که موج های وارد شونده ای از بی نهایت وجود ندارد. در دو بعد، شرط متناظر به صورت زیر است

$$\lim \sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0\,, \qquad (۱۴.۶)$$

آنچانکه $r \to \infty$. تابع گرین فضای آزاد شرط تابش را برقرار می کند.

۷.۶ مثال ها

مثال ۱. *انکسار صوتی یک موج صفحه ای توسط یک دیسک کاملا نرم.* ما سیستم مختصات و مفاهیم مثال ۱ در بخش ۳.۶ را دنبال می کنیم. علاوه بر این، شکل مستقل از زمان $e^{-i\omega t}$ برای توابع موج درگیر در مسئله را فرض می کنیم و این فاکتور را در دنباله حذف می کنیم. بخش مستقل از زمان پتانسیل سرعت u به صورت زیر است

$$u\,(\rho,\,\varphi,\,z) = u_i\,(\rho,\,\varphi,\,z) + u_S\,(\rho,\,\varphi,\,z)\,, \qquad (۱.۷)$$

که u_i و u_S به پتانسیل های سرعت زمینه های تابش و تقسیم شده اختصاص می یابد. تمام سه تابع که در معادله ی (۱) رخ می دهد در معادله ی هلم هولتز برقرار است. مسئله ی مقدار مرزی به صورت زیر است.

$$(\nabla^2 + k^2)\,u_S = 0\,, \qquad (۲.۷)$$

$$u_i\,(\rho,\,\varphi,\,z) + u_S\,(\rho,\,\varphi,\,z) = 0\,, \quad 0 \ll \rho \ll a \qquad (۳.۷)$$

$$u_S \quad \frac{\partial u_S}{\partial z} \qquad z = 0\,, \quad a < \rho < \infty \qquad (۴.۷)$$

و u_S شرط تابش در بی نهایت را برقرار می کند. پاسخ بنیادی E که در معادله ی زیر برقرار است

$$-(\nabla^2 + k^2)\,E = \delta\,(x - \xi)\,, \qquad (۵.۷)$$

همانطور که شرط تابش به صورت زیر است

$$\begin{aligned} E(x;\xi) &= \frac{\exp(ik|x-\xi|)}{4\pi|x-\xi|} \qquad (۶.۷) \\ &= \frac{\exp ik\left\{\rho^2 + t^2 - 2\rho t\left[\cos(\varphi - \varphi_1)\right] + (z - z_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{4\pi\left\{\rho^2 + t^2 - 2\rho t[\cos(\varphi - \varphi_1)] + (z - z_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}\,. \end{aligned}$$

(۳) را در E، (۵) را در u_S ضرب کنبد، انتگرال بگیرید، از اتحاد دوم گرین استفاده کنید و بدست می آید

$$u_S(x) = \int_{S^+ + S^-} \left(E\frac{\partial u_S}{\partial n} - u_S\frac{\partial E}{\partial n} \right)\, dS\,, \qquad (۷.۷)$$

که S^+ و S^- به ترتیب صفحه های بالاتر و پایین تر دیسک هستند. بر $S^\pm$، به ترتیب داریم $\partial/\partial n = \mp\partial/\partial z$. از این رو، (۷) می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} u_S(\rho,\, \varphi,\, z) &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[-E\frac{\partial u_S}{\partial z_1} + u_S\frac{\partial E}{\partial z_1}\right]_{z_1=0+} t\, d\varphi_1\, dt \\ &\quad + \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[-E\frac{\partial u_S}{\partial z_1} + u_S\frac{\partial E}{\partial z_1}\right]_{z_1=0-} t\, d\varphi_1\, dt \\ &= -\int_0^a \int_0^{2\pi} t\sigma(t,\, \varphi, 0)\, E|_{z_1=0} t\, d\varphi_1\, dt\,, \end{aligned} \tag{۸.۷}$$

که از این حقیقت که $u_s = -ui$ در هر دو طرف دیسک است استفاده کردیم و داریم

$$\sigma\left(\rho,\, \varphi_1,\, 0\right) = \left(\frac{\partial u_S}{\partial z}|_{z_1=0+} - \frac{\partial u_S}{\partial z}|_{z_1=0-}\right). \tag{۹.۷}$$

هنگامی که شرط مرزی (۳) را در (۸) اعمال می کنیم، بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \sigma\left(\rho,\, \varphi_1,\, 0\right) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} & \frac{t\sigma(t,\, \varphi_1, 0)\, \exp ik\left[\rho^2 + t^2 - 2\rho t\, \cos(\varphi - \varphi_1)\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\rho^2 + t^2 - 2\rho t\, \cos(\varphi - \varphi_1)\right]^{\frac{1}{2}}} \\ & \times d\varphi_1\, dt\,. \end{aligned} \tag{۱۰.۷}$$

با توجه به اصل بر هم نهی فوریه، می توانیم فرض کنیم که $u_i\left(\rho,\, \varphi,\, z\right)$ و $\sigma(\rho,\, \varphi)$به ترتیب شکل $u_i^{(n)}(\rho,\, z)\cos n\varphi$ و $2\sigma^{(n)}(\rho)\cos n\varphi$ هستند. سپس، عمل کردن به صورت گام هایی که از (۲.۳.۶) تا (۴.۳.۴) نتیجه گرفته شد، از (۱۰) معادله ی انتگرال زیر را بدست می آوریم.

$$u_i^{(n)}(\rho,\, 0) = \int_0^a t\sigma^{(n)}\, K_1\left(t,\, \rho\right) dt\,, \tag{۱۱.۷}$$

که کرنل $K_1(t,\, \rho)$ به صورت زیر است.

$$K_1(t,\, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp ik\left(\rho^2 + t^2 - 2\rho\, \cos\psi\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\rho^2 + t^2 - 2\rho t\, \cos\psi\right)^{\frac{1}{2}}}\, \cos n\psi\, d\psi\,. \tag{۱۲.۷}$$

معادله ی انتگرال (۱۱) مورد انتگرال فردهلم از نوع اول مورد نیاز است که پاسخ مسئله ی مقدار مرزی (۲) تا (۴) را در بر دارد.

برای یک دیسک دایره ای با شعاع داخلی b و شعاع خارجی a، معادله ی انتگرال متناظر به صورت زیر است.

$$u_i^{(n)}(\rho,\,0) = \int_b^a t\sigma^{(n)}(t)\,K_1\,(t,\,\rho)\,dt\,. \tag{۱۳.۷}$$

مثال ۲. *نوسان پیچشی از یک نیم فضای الاستیک.* از نظر مختصات قطبی استوانه ای، مسئله ی مقدار مرزی متقارن در جهت محور

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\nu}{\partial\rho} - \frac{\nu}{\rho^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} + k^2\nu = 0\,, \quad k^2 = \frac{\omega^2 da^2}{\mu}\,, \tag{۱۴.۷}$$

$$\nu = \Omega\rho\,, \quad z = 0\,, \quad 0 \ll \rho \ll 1\,, \tag{۱۵.۷}$$

$$\partial\nu/\partial z = 0\,, \quad z = 0\,, \quad \rho > 1\,, \tag{۱۶.۷}$$

نوسانات پیچشی از یک نیم فضای ناهمگن و متجانس (ایزوتروپیک) را در بر دارند که ناحیه ی $0 \ll z$ را اشغال می کنند. دیسکی به شعاع a به آن متصل شده است و مجبور به اجرای نوسانات پیچشی با دوره ی $2\pi/\omega$ شده است. تمام طول ها بدون بعد با a به عنوان طول استاندارد ساخته شده اند، چنانکه دیسک ناحیه ی $z = 0, 0 \ll \rho \ll 1$ را اشغال می کند. مقادیر d و μ به ترتیب چگالی و مدول برشی ماده ی الاستیک هستند، که k یک پارامتر بدون بعد است.

به آسانی از (۱۴) ثابت می شود که تابع $w(\rho,\,\varphi,\,z)$،

$$w(\rho,\,\varphi,\,z) = \nu(\rho,\,z\cos\varphi)\,, \tag{۱۷.۷}$$

در معادله ی هلم هولتز برقار است

$$(\nabla^2 + k^2)w = 0\,. \tag{۱۸.۷}$$

تابع گرین که متناظر با این مسئله ی مقدار مرزی است در سیستم دلخواه زیر برقرار است

$$(\nabla^2 + k^2)G(x;\xi) = -4\pi\delta(x-\xi)\,; \qquad \frac{\partial G}{\partial z_1}|_{z_1=0} = 0 \tag{۱۹.۷}$$

که، مانند قبل، $x = (\rho,\, \varphi,\, z)$ و $\xi = (t,\, \varphi_1,\, z_1)$. دوباره روش تصاویر به ما مقدار G را به صورت زیر می دهد.

$$G(x;\xi) = \frac{\exp ikr}{r} + \frac{\exp ikr}{r'}\,, \tag{۲۰.۷}$$

که $r = |x-\xi|$، $r' = |x-\xi'|$ و ξ' تصویر ξ در صفحه ی $z=0$ هستند، یعنی، $\xi' = (t,\, \varphi_1,\, -z_1)$. از این رو،

$$\begin{aligned} r = &\qquad \{\rho^2 + t^2 - 2\rho t[\cos(\varphi-\varphi_1)] + (z-z_1)^2\}^{\frac{1}{2}}\,, \\ r' = &\qquad \{\rho^2 + t^2 - 2\rho t[\cos(\varphi-\varphi_1)] + (z+z_1)^2\}^{\frac{1}{2}}\,, \end{aligned} \tag{۲۱.۷}$$

معادلات دیفرانسیل (۱۴) و (۱۹) با فرمول نمایش انتگرال توسط روش معمول را به ما ارائه می کنند. رابطه ی مورد نیاز

$$\begin{aligned} w &= \nu\,(\rho,\, z)\cos\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{z_1=0}\left[-G\frac{\partial \nu}{\partial z_1}\cos\varphi_1 + \nu\frac{\partial G}{\partial z_1}\cos\varphi_1\right]_{z_1=0} dS\,. \end{aligned} \tag{۲۲.۷}$$

است.

با اعمال شرایط مرزی (۱۵)، (۱۶) و (۱۹) در (۲۲) و استفاده از (۲۰)، داریم

$$\begin{aligned} \Omega\rho\,\cos\varphi = \frac{1}{2\pi}&\int_0^1 t\phi(t) \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{\exp ik\,[\rho^2 + t^2 - 2\rho t\,\cos(\varphi-\varphi_1)]^{\frac{1}{2}}}{[\rho^2 + t^2 - 2\rho t\,\cos(\varphi-\varphi_1)]^{\frac{1}{2}}}\,\cos\varphi_1\, d\varphi_1\, dt\,, \end{aligned} \tag{۲۳.۷}$$

که

$$\phi(t) = -\frac{\partial \nu}{\partial z_1}|_{z_1=0}\,. \tag{۲۴.۷}$$

$\psi = \varphi - \varphi_1$ را قرار دهید، همانطور که قبلا در روابط (۲.۳.۶) تا (۴.۳.۶) انجام دادیم، و بدست می آید

$$\Omega\rho = \int_0^1 t\phi(t)\, K_1\,(t,\, \rho)\, dt\,, \qquad 0 < \rho < 1\,, \tag{۲۵.۷}$$

که

$$K_1\,(t,\, \rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\exp ik\,(\rho^2 + t^2 - 2\rho t\, \cos\psi)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 + t^2 - 2\rho t\, \cos\psi)^{\frac{1}{2}}}\, \cos\psi\, d\psi\,. \tag{۲۶.۷}$$

در نهایت از اتحادهای زیر استفاده می کنیم

(۲۷.۷)

$$\frac{\exp ik\,(\rho^2 + t^2 - 2\rho t\, \cos\psi)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 + t^2 - 2\rho t\, \cos\psi)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\infty} \frac{pJ_0[p(\rho^2 + t^2 - 2\rho t \cos\psi)^{\frac{1}{2}}]}{\gamma}\, dp,$$

که

و

در (۲۶)، از تعامد توابع کسینوس استفاده کنید، و بدست می آید

که ...، معادله ی انتگرال متناظر برای چرخش پایدار نیم فضای الاستیک را بدست می آوریم، و (۲۹) می شود

برای مورد یک دیسک دایره ای با شعاع داخلی b و شعاع خارجی a، معادله ی انتگرال که متناظر با (۲۵) است به شکل زیر است.

مثال ۳. جریان پایدار استوک در یک محیط محدود شده. معادلات جریان استوک

جریان آرام و پایدار سیالات ویسکوز تراکم ناپذیر را کنترل می کند. این معادلات به کمک سرعت جریان آزاد u و یک مشخصه ی طول a ذاتی در مسئله بدون بعد ساخته شده است. مقادیر q و p به ترتیب برای بردار سرعت و فشار است.

بگذارید S سطح جامد B متحرک در سیال باشد؛ سپس، شرایط مرزی زیر

که ... جهت حرکت B است، در جهت ... قرار گرفته شده است. مسئله ی مقدار مرزی (۳۲) تا (۳۳) می توانند به یک معادله ی انتگرال فردهلم از نوع اول با تعریف تانسور گرین ... (یا ...) و بردار گرین ... (یا ...) تبدیل شود، که در سیستم ریاضی زیر برقرار است.

که ...، دلتای کرونکار است.

این با کنترل جهت دنبال می شود که سیستم (۳۴) تا (۳۵) فرمول های ارائه شده ی زیر را دارند

پاسخ مناسب معادله ی دو همساز (۳۷) ... است. از این رو،

فرمول معادله ی انتگرال مورد نیاز با گرفتن ضرب اسکالر (۳۲) در ... از (۳۴) در q دنبال می شود و استفاده از گام های تفریق و انتگرال گیری. در انتگرال بدست آمده، عبارات واقع شده ی ... و ... وجود دارد و آن ها می توانند با استفاده از اتحادهای زیر انجام شوند.

که از نتایج ... استفاده کردیم. نتیجه ی نهایی به صورت زیر است.

از معادله ی (۳۴) و قضیه ی دیورژانس، این بدست می آید که، اگر q در S ثابت باشد، سپس معادله ی (۴۱) به صورت زیر کاهش می یابد.

که

در نهایت، با استفاده از شرط مرزی (۳۳)، ما معادله ی انتگرال مورد نیاز زیر را داریم.

مثال ۴. جریان پایدار اوسین. معادلات بدون بعد اوسین به صورت زیر هستند.

که ... عدد رینولدز است، ... ضریب ویسکوزیته ی کینماتیک است، و a و u مقادیر مشابه هستند که در مثال پیشین تعریف شدند. تانسور گرین T و بردار گرین p برای این مسئله سیستم زیر را برقرار می کند.

فرمول های نمایش متناظر به صورت زیر هستند.

برای حل (۵۱) برای ...، ابتدا از فرمول

در آن استفاده می کنیم و بدست می آوریم

از این رو، اگر ... در رابطه ی زیر برقرار باشد

سپس (۵۱) صادق می باشد.

از طرف دیگر، همچنین می توانیم (۵۱) را به صورت زیر بنویسیم

با جایگذاری

و استفاده از اتحاد

می توانیم (۵۵) را به صورت زیر بنویسیم

با ... . اکنون، مشاهده می شود که، با طبیعت تابع دلتای دیراک، عامل ... بر معادله تنها در ... تاثیر می گذارد، که مقدار آن واحد است. از این رو، (۵۸) نتیجه می دهد

از (۵۴) و (۵۹)، بدست می آید

اگر قرار دهیم

داریم

با ترکیب (۶۰) تا (۶۲) با

در می یابیم که

یا

در نتیجه، تانسور گربن T و بردار گرین p تعیین می شوند.

معادله ی انتگرال برابر با مسئله ی مقدار مرزی (۴۵) تا (۴۶) حال به دقت در مسیری که ما معادله ی انتگرال (۴۱) را می یابیم یافته می شود. در واقع، فرمول کنونی به صورت زیر است.

که ... مولفه ی متعامد بیرونی ... است. هنگامیکه از شرط مرزی ... بر S ، معادله ی (۴۷)، و قضیه ی دیورژانس استفاده می کنیم، بدست می آوریم

که f توسط (۴۳) تعریف می شود.